ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 34, No. 4, 1979

SUR LA SINGULARITÉ DES PRODUITS DE RIESZ ET DES MESURES SPECTRALES ASSOCIÉES À LA SOMME DES CHIFFRES

PAR

M. QUEFFELEC

ABSTRACT

Using a property of generalized characters, we first prove that two Riesz products with constant coefficients and distinct Fourier spectra are mutually singular. If $S_r(n)$ denotes the sum of digits in the r-adic representation of the integer n, the same technique allows us to establish the mutual singularity of the spectral measures of the sequences: $\alpha(n)=\exp[2i\pi aS_p(n)]$, $\beta(n)=\exp[2i\pi bS_q(n)]$, for every pair of integers $p\neq q$, a, b being real numbers such that $a(p-1)\notin Z$ and $b(q-1)\notin Z$. This result has been proved by T. Kamae when p and q are two relatively prime integers.

Introduction

Dans cette note, on se propose d'appliquer la technique des caractères généralisés due à Sreider [9], à l'étude de la singularité mutuelle de certaines mesures.

G étant un groupe abélien localement compact, Δ le spectre de l'algèbre de banach, $M(G)$, des mesures régulières bornées sur G, on rappelle [9] qu'un élément χ de Δ est la donnée d'une famille χ_μ de fonctions de $L^\infty(\mu)$ pour chaque μ de $M(G)$, vérifiant:

(1) $0<\sup(\|\chi_\mu\|_{L^\infty(\mu)}, \mu\in M(G))\leqq 1$,

(2) $\chi_{\mu*\nu}(x+y)=\chi_\mu(x)\chi_\nu(y)$ $\mu\otimes\nu$-presque partout,

(3) si ν est absolument continue par rapport à μ, $\chi_\nu=\chi_\mu$ ν-presque partout.

Si l'on peut trouver $\chi\in\Delta$ avec $\chi_\nu=a$ (ν-pp) et $\chi_\mu=b$ (μ-pp) où a et b sont deux constantes distinctes, les mesures μ et ν sont étrangères.

Received May 15, 1979

Produits de Riesz

Soit Θ un sous ensemble de $\Gamma = \hat{G}$ (que nous supposons sans élément d'ordre 2 pour simplifier).

On désigne par $\Omega(\Theta)$ l'ensemble des mots formés sur Θ, c'est-à-dire l'ensemble des caractères ω qui s'écrivant, en notation multiplicative:

$$\omega = \theta_1^{\varepsilon_1}\theta_2^{\varepsilon_2}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n} \qquad \text{avec } \theta_i \in \Theta \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Θ est dit dissocié si l'écriture d'un tel ω distinct de 1, est unique, à l'ordre près.

La mesure de probabilité μ, est un produit de Riesz construit sur Θ et de coefficients $(a(\theta), \theta \in \Theta)$ avec $|a(\theta)| \leqq 1$ pour tout θ, si μ est la limite vague de la famille de polynômes $P_\Phi = \Pi_{\theta\in\Phi}(1 + a(\theta)\bar{\theta} + \overline{a(\theta)}\theta)$, où Φ décrit les sous ensembles finis de Θ.

Les coefficients de Fourier de la mesure μ sont donnés par:

$$\hat{\mu}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 1 \\ \prod_{i=1}^{n} a(\theta_i)^{(\varepsilon_i)} & \text{si } \omega = \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a(\theta)^{(\varepsilon)} = a(\theta)$ si $\varepsilon = 1$, $\overline{a(\theta)}$ si $\varepsilon = -1$.

La singularité de deux produits de Riesz a été étudiée par J. Peyrière [7] et Brown [2]. Soient μ et ν deux produits de Riesz construits respectivement sur Θ et Φ, de coefficients $a(\theta)$ pour μ, $b(\phi)$ pour ν. Il est prouvé dans [2]:

Si $\Theta \cup \Phi$ est encore dissocié, et si $\Sigma_{\gamma\in\Theta\cup\Phi}|a(\gamma) - b(\gamma)|^2$ diverge, μ et ν sont étrangères.

La méthode ne permettant apparemment pas de conclure sans hypothèse sur Θ et Φ, on se propose de donner une réponse dans un cas particulier.

PROPOSITION 1. *Soit $G = T$ et considérons θ, ϕ deux entiers $\geqq 3$, r et s deux réels de* $[0,1]$.

Les mesures $\mu = \Pi(1 + r\cos 2\pi\theta^n x)$ et $\nu = \Pi(1 + s\cos 2\pi\phi^n x)$ sont soit égales, soit étrangères.

DÉMONSTRATION. On distingue deux cas:

(1) $(\mathrm{Log}\,\theta/\mathrm{Log}\,\phi) \in Q$; il existe alors n et m entiers $\geqq 1$ tels que $\theta^n = \phi^m$.

Si on désigne par T la transformation du tore $x \to \theta x$, la mesure μ est invariante par T et T est fortement mélangeante pour μ ; de même la mesure ν est invariante par S et S est fortement mélangeante pour ν si S désigne la transformation du tore $x \to \phi x$. Il s'ensuit que la transformation $U = T^n = S^m$ préserve μ et ν et qu'elle est ergodique pour μ et ν. On déduit alors du théorème ergodique que μ et ν sont soit égales, soit étrangères.

(2) $(\operatorname{Log}\theta/\operatorname{Log}\phi) \notin Q$. Si $\omega \in \Omega(\Theta)$, on note $l_\Theta(\omega)$ la longueur du mot ω en base Θ. Dans le cas présent en adoptant cette fois une notation additive,

$$l_\Theta(\omega) = \sum |\varepsilon_j| \quad \text{si} \quad \omega = \sum_{\text{finie}} \varepsilon_j \theta^j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in \{0 \pm 1\}.$$

La suite de mots $(\omega_n) = (\theta^n)$ est asymptotiquement dissociée pour μ et $\hat{\mu}(\omega_n) = r/2$. Il ressort de [2] que la suite de caractères $\gamma_{\omega_n}: x \to e^{2\pi i\omega_n x}$, tend vers la constante $r/2$ pour la topologie $(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$.

Par ailleurs. Straus et Senge ont démontré dans [10], que pour θ et ϕ, deux entiers distincts $\geqq 2$, le nombre des entiers dont la longueur en base θ et la longueur en base ϕ sont bornées, est fini si et seulement si $(\operatorname{Log}\theta)/(\operatorname{Log}\phi)$ est irrationnel. On en déduit, que si ω_n est un mot de Φ, pour une infinité d'indices n, $l_\Phi(\omega_n)$ augmente indéfiniment avec n et

$$\hat{\nu}(\omega_n) = \left(\frac{s}{2}\right)^{l_\Phi(\omega_n)} \quad \text{tend vers } 0.$$

Si r est un entier quelconque, par le même argument, $\hat{\nu}(r + \omega_n)$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Ceci prouve que (γ_{ω_n}) tend vers 0 pour la topologie $\sigma(L^\infty(\nu), L^1(\nu))$. Si χ est un caractère de Δ, adhérent à la suite de caractères γ_{ω_n}, il résulte de ce qui précède que $\chi_\mu = r/2$ et $\chi_\nu = 0$, et on en déduit la proposition 1 compte tenu de la remarque en introduction.

On peut noter que le résultat subsiste dans ce second cas, lorsque $\mu = \Pi(1 + a_n \cos 2\pi\theta^n x)$ et $\nu = \Pi(1 + b_n \cos 2\pi\phi^n x)$ et que l'une des deux suites (a_n), (b_n) n'est pas dans C_0.

Mesures spectrales associées à la somme des chiffres

Pour un entier $r \geqq 2$, on note $S_r(n)$ la somme des chiffres dans la représentation en base r de l'entier $n \geqq 0$:

$$S_r(n) = \sum_{k=0}^{k_0} n_k \quad \text{si} \quad n = \sum_{k=0}^{k_0} n_k r^k.$$

Mendès France dans [6] montre que la suite complexe $\alpha(n) = e^{2\pi i c S_r(n)}$ où $c \in R$ admet une mesure spectrale unique λ, définie, on le rappelle, par

$$\hat{\lambda}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n+k)\overline{\alpha(n)} \quad \text{si } k \geqq 0$$

$$= \overline{\hat{\lambda}(-k)} \qquad \text{si } k \leqq 0.$$

Cette mesure est continue lorsque $c(r-1) \notin Z$; de plus elle est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue [3]. Si p et q sont deux entiers premiers entre eux et $\alpha(n) = e^{2\pi i a S_p(n)}$, $\beta(n) = e^{2\pi i b S_q(n)}$ avec a, b réels vérifiant $a(p-1) \notin Z$, $b(q-1) \notin Z$, Kamae démontre dans [4] que les mesures spectrales associées λ_α et λ_β sont étrangères.

On se propose de démontrer que le résultant reste vrai pour tout couple p, q distincts; plus précisément:

Proposition 2. *Etant donnés p et q entiers $\geqq 2$, a et b réels vérifiant $a(p-1) \notin Z$, $b(q-1) \notin Z$, les mesures spectrales λ_α et λ_β sont soit égales, soit étrangères.*

Auparavant, en suivant le calcul fait par Bésineau [1], on établit le:

Lemme 1. *Si $\alpha(k) = e^{2\pi i c S_r(k)}$, $j \geqq 0$, $n \in Z$ et $|m| < r^j$*

$$\hat{\lambda}(nr^j + m) = A_j(m).\hat{\lambda}(n) + B_j(m).\hat{\lambda}(n+1) \tag{1}$$

où

$$A_j(m) = \frac{1}{r^j} \sum_{a=0}^{r^j - m - 1} \overline{\alpha(a)}\, \alpha(a+m),$$

$$B_j(m) = \frac{1}{r^j} \sum_{a=r^j - m}^{r^j - 1} \overline{\alpha(a)}\, \alpha(a + m - r^j),$$

lorsque m est $\geqq 0$, et:

$$A_j(-m) = \overline{A_j(m)}, \qquad B_j(-m) = \overline{B_j(m)}.$$

On en déduit les propriétés suivantes pour la mesure λ.

(P_1) λ est invariante par la transformation du tore T: $x \to rx$. Il suffit pour le voir, de faire $j = 1$ et $m = 0$ dans (1).

(P_2) T est fortement mélangeante pour λ.

En effet, pour tout m dans Z, $\lim_{j\to\infty} A_j(m) = \hat{\lambda}(m)$ et $\lim_{j\to\infty} B_j(m) = 0$, on en déduit que pour n et m dans Z,

$$\lim_{j\to\infty} \hat{\lambda}(nr^j + m) = \hat{\lambda}(n).\hat{\lambda}(m)$$

d'où la propriété.

(P_3) λ a ses puissances de convolution fortement indépendantes, au sens: $\delta_x * \lambda^n$ est étrangère à λ^m pour tout $x \in T$ et tous $n \neq m$ dans N, et elle est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, si $c(r-1) \not\in Z$.

Il suffit pour cela, de trouver un caractère χ de $\bar{\Gamma}$, adhérence de Γ dans Δ, avec:

$$\chi_\lambda = c \qquad \text{et} \qquad 0 < |c| < 1.$$

Considérons par exemple la suite de caractères $\gamma_m(x) = e^{2\pi i r^m x}$.

Par la propriété (P_1), $\hat{\lambda}(r^m) = \hat{\lambda}(1)$, et de la relation (1) où l'on fait $n = 0$, $j = m = 1$, on tire facilement la valeur A de $\hat{\lambda}(1)$, à savoir:

$$A = \frac{(r-1)e^{2\pi i c r}}{re^{2\pi i c(r-1)} - 1}.$$

Si $c(r-1) \not\in Z$, $(r-1)/(r+1) \leqq |A| < 1$, et si χ est un caractère de Δ adhérent à la suite (γ_m), χ convient puisque, par la propriété (P_2), $\chi_\lambda = A$.

Démonstration de la Proposition

Ici encore, on peut distinguer deux cas:

(i) Si $(\operatorname{Log} p)/(\operatorname{Log} q)$ est rationnel, les propriétés P_1, P_2 et le théorème ergodique permettent de conclure, comme dans la paragraphe précédent, que λ_α et λ_β sont soit égales, soit étrangères.

(ii) Si $(\operatorname{Log} p)/(\operatorname{Log} q)$ est irrationnel, on utilise le lemme suivant dû à Kamae [4] et résultant de l'articte de Straus et Senge [10]:

Lemme 2. *Si $\alpha(n) = e^{2\pi i a S_p(n)}$ avec $a(p-1) \not\in Z$ et si q est un entier tel que $(\operatorname{Log} p)/(\operatorname{Log} q)$ soit irrationnel, alors:*

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ l \to \infty \\ m > l}} \hat{\lambda}_\alpha(q^{2m} - q^{2l}) = 0.$$

Considérons alors la suite de caractères $\gamma_m(x) = e^{2\pi i q^{2m} x}$.

Si ϕ est un caractère de $\bar{\Gamma}$ adhérent à la suite (γ_m), ϕ_{λ_α} est limite pour la topologie $\sigma(L^\infty(\lambda_\alpha), L^1(\lambda_\alpha))$ d'une sous suite de (γ_m), notée encore (γ_m); $\phi\overline{\gamma_m}$ approche $|\phi|^2$ pour cette même topologie et pour m ainsi fixé, il existe $n > m$ tel que $\gamma_n\overline{\gamma_m}$ approche $\overline{\gamma_m}\phi$. On peut donc trouver une suite (m_i), telle que:

$$\gamma_{m_j}\overline{\gamma_{m_i}} \text{ tende vers } |\phi|^2 \text{ pour } \sigma(L^\infty(\lambda_\alpha), L^1(\lambda_\alpha))$$

quand m_i et m_j tendent vers ∞ avec $m_j > m_i$.

Par le lemme 2, $\hat{\lambda}_\alpha(|\phi|^2)=0$ et $\phi_{\lambda_\alpha}=0$ λ_α-pp.

D'autre part, $\phi_{\lambda_\beta}=B$ où $B=\hat{\lambda}_\beta(1)$ est une constante non nulle, comme on l'a vu plus haut.

Les mesures λ_α et λ_β sont donc étrangères.

Remarque. L'analogie entre les produits de Riesz et les mesures spectrales associées à la somme des chiffres sera précisée dans [8] où l'on montre plus généralement que les mesures spectrales associées à des suites q-multiplicatives de module 1, sont limites vagues de produits de polynômes positifs; elles apparaissent ainsi comme des produits de Riesz généralisés.

References

1. J. Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres"*, Acta Arith. **20** (1972), 401–416.

2. C. Brown, *Riesz products and generalized characters*, Proc. London Math. Soc. (3) **30** (1975), 209–238.

3. J. Coquet, T. Kamae and M. Mendés-France, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 369–384.

4. T. Kamae, *Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures*, Osaka J. Math. **15** (1978), 569–574.

5. T. Kamae, *Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by sums of digits to different bases*, in *Dynamical Systems* I, Warsaw, Astérisque **49** (1978), 109–116.

6. M. Mendés France, *Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires*, J. Analyse Math. **20** (1967), 1–56.

7. J. Peyrière, *Sur les produits de Riesz*. C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973), 1417–1419.

8. M. Queffelec, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979).

9. A. Sreider, *The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution*, Mat. Sb. **27** (69) (1950), 297–318.

10. E. G. Straus and H. G. Senge, PV numbers and sets of multiplicity, Proc. Washington State Univ. Conf. on Number Theory, 1971.

U.E.R. de Mathematique
Paris XIII
CSP Villetaneuse 93430, France